Modélisation de structures composites par éléments finis de coque dégénérés

Pascal Geoffroy* — Raoul Girard**

** O.N.E.R.A. - Institut de Mécanique des Fluides de Lille*
5, Boulevard Paul Painlevé
59045 Lille Cedex - France

*** O.N.E.R.A.*
29, Avenue de la Division leclerc
BP 72, 92322 Châtillon Cedex - France

RÉSUMÉ. *L'utilisation croissante des matériaux composites dans les applications industrielles (aéronautiques, spatiales, médicales, ...) nécessite pour les concepteurs de posséder des méthodes de calcul par éléments finis qui soient fiables et rapides vis-à-vis de la prévision du comportement mécanique des structures composites. Cet article présente l'extension de la formulation de l'élément fini tridimensionnel de coque dégénéré fondée sur la théorie de Mindlin, pour la résolution de problèmes statiques, de flambement linéaire et en vibrations libres de structures composites ou stratifiées. L'élément fini de coque développé possède cinq noeuds et quarante degrés de liberté. Ensuite sont présentés les résultats numériques obtenus sur quelques cas tests et exemples d'applications réelles montrant la validité de l'élément de coque développé.*

ABSTRACT. *Due to the increased use of composite materials in industrial applications, reliable and efficient finite element methods are needed for the analysis and design of composite structures. This paper deals with the extension of the formulation of the three-D degenerated shell element based on the Mindlin theory for the analysis of static, linear buckling and free vibrations problems of composite and sandwich structures. The shell element has 5 nodes and 40 degrees of freedom. Numerical results obtained for benchmark and real tests are presented and compared showing the validity of the present shell element.*

MOTS-CLÉS : *Éléments finis, coques, modélisation, matériaux composites, flambement, charges critiques, tests vibratoires.*
KEY WORDS : *Finite element, shells, modelisation, composite materials, buckling, critical loads, vibration tests.*

Revue européenne des éléments finis. Volume 2 - n° 3/1993, pages 357 à 376

1. Introduction

Les matériaux composites à renforts fibreux sont de plus en plus fréquemment utilisés dans les domaines de l'aéronautique, de l'espace, de l'automobile, de la marine et également de la médecine [BOU 89], [GAY 89], [DUP 89]. En effet ils permettent notamment d'obtenir des rigidités élevées de composants structuraux, associées à des masses faibles à partir de leurs propriétés mécaniques intrinséques couplées à des arrangements spécifiques de séquences d'empilement.

Cet intérêt croissant pour la réalisation de composants industriels en matériaux composites a conduit parallèlement au développement de plusieurs nouvelles méthodes numériques par éléments finis dans le but d'obtenir lors des phases de conception, une prévision la plus réelle possible du comportement mécanique statique et dynamique de ces pièces soumises à différentes sollicitations lors de leur utilisation.

Par contre, la plupart de ces matériaux composites à haute perfomance présentent un faible rapport entre les modules de cisaillement transverse et le module d'Young longitudinal (valeur comprise entre 20 et 50) comparé à celui existant pour les matériaux métalliques classiques (proche de 3 en général). En conséquence les déformations de cisaillement transerve peuvent être importantes et peuvent conduire dans certains cas, à des réductions significatives de la rigidité en flexion des structures [WHI 87], [NOO 90]. C'est pourquoi, pour le cas des structures composites stratifiées ou sandwich, les effets de déformation de cisaillement transverse ne peuvent pas être ignorés comme dans les modèles fondés sur la théorie classique de Love-Kirchhoff.

Dans ce contexte, il apparaît nécessaire d'utiliser pour la modélisation de structures composites des modèles par éléments finis fondés sur les hypothèses de la théorie de Reissner/Mindlin [MIN 51], [REI 45] qui supposent que la normale à la surface moyenne non déformée de la coque ne reste pas forcément normale à la surface moyenne après déformation d'une part, et d'autre part qui permettent de prendre en compte l'influence des déformations de cisaillement transverse.

Pour la modélisation par éléments finis de ces structures tridimensionnelles complexes (voilure, bec de bord d'attaque, ...), plusieurs approches sont possibles [BAT 92]. La première concerne les éléments courbés fondés sur la théorie des coques avec une description curviligne [BAT 77], [GEO 83]. La discrétisation de la coque à l'aide de facettes planes triangulaires ou quadrilatères [CHA 88], [FAF 89], [LAR 90] constitue la deuxième approche. La troisième et dernière est relative à l'utilisation d'éléments finis isoparamétriques dégénérés [AHM 70], [GIR 77], [GIR 80], [OWE 83], [COR 88].

L'objet de cet article est de présenter l'extension de la formulation de l'élément fini de coque tridimensionnel dégénéré, développé initialement par Ahmad et al. [AHM 70], pour l'analyse de problèmes statiques, de flambement linéaire et en vibrations libres de coques composites ou stratifiées.

La première partie de l'article décrit la formulation isoparamétrique de cet élément fini qui est fondée sur celle de l'élément tridimensionnel héxaédrique à vingt noeuds [DHA 84] en considérant une variation linéaire des déplacements suivant l'épaisseur et l'hypothèse des contraintes planes. Après la présentation géométrique et cinématique

retenues pour l'élément, sont définies les relations déformations-déplacements, les lois de comportement avec la prise en compte des facteurs de correction de cisaillement transversal. Les matrices élémentaires de rigidité linéaire, de rigidité géométrique et de masse et le vecteur des charges équivalent sont établis.

La dernière partie concerne la présentation de résultats numériques obtenus avec l'élément de coque sur des problèmes statiques linéaires, de vibrations libres, de détermination de charges critiques de flambement linéaire de plaques et coques composites ou sandwich. Les résultats sont comparés soit à des résultats provenant de la littérature, soit à des résutats expérimentaux.

2. Description de l'élément fini de coque

2.1 *Définition géométrique*

L'élément fini décrit dans cet article [SIM 81], [GIR 86], [GEO 86] est un élément à 16 noeuds répartis en deux groupes de 8 noeuds appartenant à la surface supérieure et inférieure de la coque (*figure 1*).

Pour la description géométrique de cet élément de coque, trois systèmes de coordonnées sont utilisés. Le premier système est le repère fixe orthonormé de coordonnées globales cartésiennes X, Y, Z. Le second système correspond au système de coordonnées curvilignes ξ, η et ζ et le troisième est associé au repère local orthonormé de coordonnées x', y' et z' (*figure 1*).

Les surfaces $\zeta = \pm 1$ sont associées aux deux faces supérieure et inférieure de la coque tandis que les surfaces $\eta = \pm 1$ correspondent aux deux faces latérales et les surfaces $\xi = 0$ et $\eta = 0$ sont associées aux plans possédant les noeuds intermédiaires.

Les huit nœuds de la face supérieure et ceux de la face inférieure de l'élément de coque sont respectivement définis par les coordonnées suivantes :

$$< x_i^+, y_i^+, z_i^+ >, < x_i^-, y_i^-, z_i^- > \qquad [1]$$

Soit r le vecteur position d'un point quelconque Q de la coque, il est défini géométriquement en fonction des coordonnées paramétriques ξ, η et ζ par :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi, \eta) \left(\frac{1+\zeta}{2}\right) \begin{Bmatrix} x_i^+ \\ y_i^+ \\ z_i^+ \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi, \eta) \left(\frac{1-\zeta}{2}\right) \begin{Bmatrix} x_i^- \\ y_i^- \\ z_i^- \end{Bmatrix} \qquad [2]$$

où < x y z > sont les coordonnées du point Q dans le repère global et les termes Ni (ξ, η) sont les fonctions d'interpolation de Serendip [DHA 84].

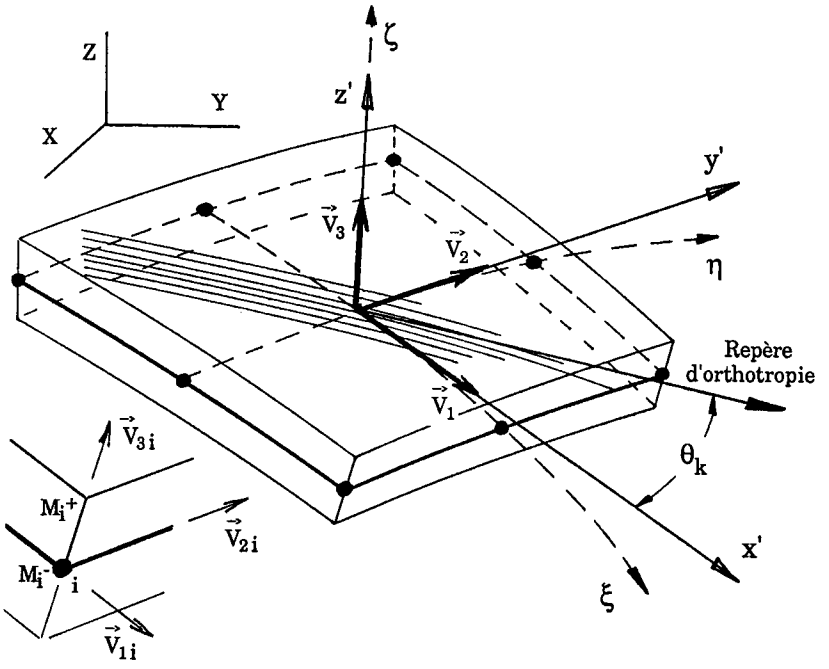


Figure 1 : *Description géométrique de l'élément de coque tridimensionnel dégénéré*

L'expression [2] peut encore s'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta) \left(\begin{Bmatrix} x_i^- \\ y_i^- \\ z_i^- \end{Bmatrix} + \left(\frac{1+\zeta}{2} \right) \overrightarrow{V_{3i}} \right) \qquad [3]$$

où le vecteur V_{3i} est construit à partir des coordonnées des noeuds des faces supérieure et inférieure correspondant au point i. Il est défini par :

$$\{ \overrightarrow{V_{3i}} \} = \begin{Bmatrix} x_i^+ - x_i^- \\ y_i^+ - y_i^- \\ z_i^+ - z_i^- \end{Bmatrix} \qquad [4]$$

Il convient de remarquer que le long d'une facette latérale $\xi = \pm 1$ ou $\eta = \pm 1$, les interpolations ne dépendent que des noeuds situés sur cette facette. Par conséquence, la modélisation géométrique est continue aux interfaces des éléments. Par contre les plans tangents aux surfaces ζ = Cte sont discontinus.

2.2 *Formulation cinématique*

Du point de vue de la cinématique, l'élément de coque tridimensionnel dégénéré est défini par huit noeuds situés sur la surface de référence et cinq degrés de liberté par noeud (*figure 2*).

Dans la formulation choisie pour l'élément de coque, la surface de référence retenue correspond à la face inférieure de l'élément. Si l'on désire caractériser la cinématique de la surface moyenne de la coque par des degrés de liberté, deux éléments seront alors juxtaposés en faisant coïncider les deux faces inférieures.

Soit U le champ de déplacement d'un point quelconque de la coque. Il s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi, \eta) \left(\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \left(\frac{1+\zeta}{2}\right) t_i \left[\overrightarrow{V_{1i}}, \overrightarrow{V_{2i}}\right] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \right) \qquad [5]$$

où $< u\ v\ w >$ représente les composantes du vecteur déplacement du point quelconque, $< u_i\ v_i\ w_i >$ sont les composantes de déplacement du noeud i appartenant à la surface de référence et $< \alpha_i\ \beta_i >$ sont les deux composantes de la rotation du vecteur unitaire V_{3i} pour chaque noeud i. Le terme t_i représente l'épaisseur au point i, défini par :

$$t_i = \| \overrightarrow{V_{3i}} \| \qquad [6]$$

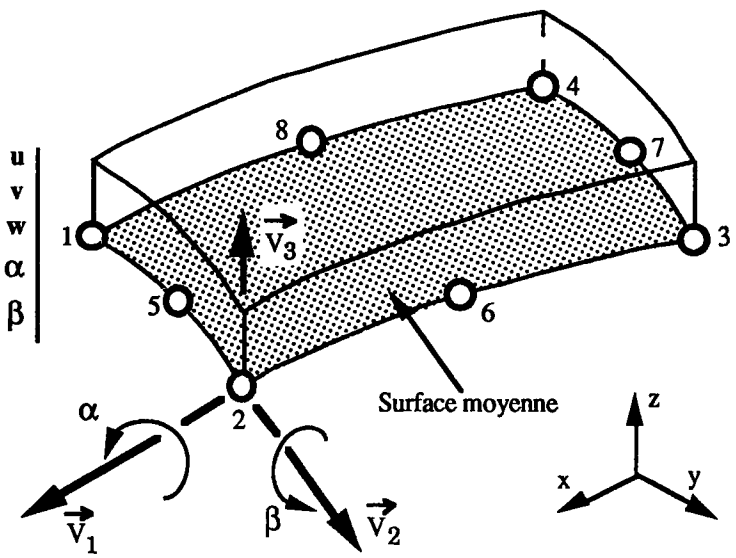


Figure 2 : *Variables nodales de l'élément*

2.3 *Relations déformations-déplacements*

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange s'exprime dans le repère local d'axes {x', y', z'} défini par l'ensemble des trois vecteurs unitaires, sous la forme simplifiée suivante :

$$\{\varepsilon'\} = \{\varepsilon'_L\} + \{\varepsilon'_{NL}\} \qquad [7]$$

avec $< \varepsilon' > = < \varepsilon'_{x'x'}\ \varepsilon'_{y'y'}\ \varepsilon'_{x'y'}\ \varepsilon'_{x'z'}\ \varepsilon'_{y'z'} >$

Les vecteurs $\{\varepsilon'_L\}$ et $\{\varepsilon'_{NL}\}$ représentent respectivement les vecteurs des déformations linéaires et non linéaires.

Le vecteur des déformations linéaires est défini par :

$$\{\varepsilon'_L\} = \begin{Bmatrix} u'_{,x'} \\ v'_{,y'} \\ \frac{1}{2}(u'_{,y'} + v'_{,x'}) \\ \frac{1}{2}(u'_{,z'} + w'_{,x'}) \\ \frac{1}{2}(v'_{,z'} + w'_{,y'}) \end{Bmatrix} \qquad [8]$$

où u', v' et w' sont les composantes du déplacement dans le repère local.

Le vecteur des déformations non linéaires s'exprime sous la forme suivante :

$$\{\varepsilon'_{NL}\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(u'^2_{,x'} + v'^2_{,x'} + w'^2_{,x'}) \\ \frac{1}{2}(u'^2_{,y'} + v'^2_{,y'} + w'^2_{,y'}) \\ \frac{1}{2}(u'_{,x'}u'_{,y'} + v'_{,x'}v'_{,y'} + w'_{,x'}w'_{,y'}) \\ \frac{1}{2}(u'_{,y'}u'_{,z'} + v'_{,y'}v'_{,z'} + w'_{,y'}w'_{,z'}) \\ \frac{1}{2}(u'_{,z'}u'_{,x'} + v'_{,z'}v'_{,x'} + w'_{,z'}w'_{,x'}) \end{Bmatrix} \qquad [9]$$

Considérons le vecteur des déformations linéaires $\{\varepsilon'_L\}$ [8], cette expression peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\{\varepsilon'_L\} = [A'] \{g'\} \qquad [10]$$

où [A'] est une matrice de dimensions 5 x 9 contenant soit des termes unité, soit nuls et le vecteur < g'> est tel que : $< u'_{,x'}\ u'_{,y'}\ u'_{,z'}\ v'_{,x'}\ v'_{,y'}\ v'_{,z'}\ w'_{,x'}\ w'_{,y'}\ w'_{,z'} >$.

Soit [P] la matrice des cosinus directeurs qui permet de passer du repère local au repère global. Les dérivées des déplacements par rapport aux coordonnées locales x', y', z' sont reliées aux dérivées des déplacements dans le repère global par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} u'_{,x'} & v'_{,x'} & w'_{,x'} \\ u'_{,y'} & v'_{,y'} & w'_{,y'} \\ u'_{,z'} & v'_{,z'} & w'_{,z'} \end{bmatrix} = [P]^T \begin{bmatrix} u_{,x} & v_{,x} & w_{,x} \\ u_{,y} & v_{,y} & w_{,y} \\ u_{,z} & v_{,z} & w_{,z} \end{bmatrix} [P] \qquad [11]$$

En ré-ordonnant les deux matrices des dérivées des déplacements locaux et globaux définies ci-dessus, la relation [11] s'écrit :

$$\{g'\} = [Q] \{g\} \qquad [12]$$

où la matrice [Q] est de dimensions 9 x 9 et est fonction des matrices des cosinus directeurs [P]. Le vecteur < g > est tel que : $< u_{,x}\ u_{,y}\ u_{,z}\ v_{,x}\ v_{,y}\ v_{,z}\ w_{,x}\ w_{,y}\ w_{,z} >$.

Exprimons maintenant les dérivées des déplacements globaux en fonction des dérivées par rapport aux coordonnées curvilignes ξ, η et ζ. Elles sont définies classiquement [DHA 84] par l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} u_{,x} & v_{,x} & w_{,x} \\ u_{,y} & v_{,y} & w_{,y} \\ u_{,z} & v_{,z} & w_{,z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} u_{,\xi} & v_{,\xi} & w_{,\xi} \\ u_{,\eta} & v_{,\eta} & w_{,\eta} \\ u_{,\zeta} & v_{,\zeta} & w_{,\zeta} \end{bmatrix} \qquad [13]$$

où $[J]^{-1}$ est l'inverse de la matrice jacobienne.

En considérant les expressions [12] et [13], le vecteur des déformations linéaires [10] devient :

$$\{\varepsilon'_L\} = [A'] [Q] [J^*] \{G\} \qquad [14]$$

avec le vecteur $< G > = < u,_\xi\ u,_\eta\ u,_\zeta\ v,_\xi\ v,_\eta\ v,_\zeta\ w,_\xi\ w,_\eta\ w,_\zeta >$ et avec la matrice [J *] définie par :

$$[J^*] = \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \qquad [15]$$

2.4 *Relations déformations-variables nodales de l'élément*

Soit le vecteur des variables nodales { d_i } associé au noeud i de l'élément :

$$< d_i > = < u_i\ v_i\ w_i\ \alpha_i\ \beta_i > \qquad [16]$$

En considérant la relation [5] associée aux déplacements u, v et w et les fonctions d'interpolation de Serendip N_i (i = 1, 8), l'expression du vecteur des dérivées des déplacements { G } par rapport aux coordonnées curvilignes peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\{ G \} = \sum_{i=1}^{8} [H_i] \{ d_i \} \qquad [17]$$

où [H_i] est une matrice de dimensions 9 x 5 qui dépend uniquement des fonctions d'interpolation N_i et de ses dérivées.

Définissons le vecteur des déplacements nodaux de l'élément de coque à huit noeuds :

$$< d >^T = < u_1\ v_1\ w_1\ \alpha_1\ \beta_1\ u_2\ .....u_8\ v_8\ w_8\ \alpha_8\ \beta_8 > \qquad [18]$$

Le vecteur des dérivées des déplacements { G } s'écrit :

$$\{ G \} = [H] \{ d \} \qquad [19]$$

où la matrice [H] est une matrice de dimensions 9 x 40, composée des huit matrices [H_i].

Finalement en employant les expressions [14] et [19], le vecteur des déformations linéaires [10] s'écrit en fonction des variables nodales de l'élément :

$$\{ \varepsilon_L' \} = [B] \{ d \} \qquad [20]$$

avec la matrice [B] telle que :

$$[B] = [A'] [Q] [J^*] [H] \qquad [21]$$

2.5 *Relations contraintes-déformations*

Soit une coque composée d'un nombre fini de couches de matériaux orthotropes différents parfaitement liées les unes aux autres, et disposées l'une sur l'autre avec des angles d'orientation différents suivant la direction ζ. Les axes 1, 2 et 3 constituent le repère local d'orthotropie pour un matériau donné avec les axes 1 et 2 dans le plan du pli respectivement parallèle et perpendiculaire aux fibres (*figure 1*). L'axe 3 est perpendiculaire au plan formé par les axes 1 et 2 et est confondu avec l'axe local z'.

Chaque couche du stratifié est supposée avoir un comportement linéaire élastique.

En négligeant la contrainte normale transverse σ_{33} (hypothèse de contraintes planes), les relations contraintes-déformations pour une couche k s'écrivent dans son repère local d'orthotropie :

$$\{ \overline{\sigma} \} = [\overline{D}] \{ \overline{\varepsilon} \} \qquad [22]$$

où le vecteur σ est égal à $< \sigma_{11}\ \sigma_{22}\ \tau_{12}\ \tau_{13}\ \tau_{23} >$, le vecteur des contraintes et le vecteur ε est égal à $< \varepsilon_{11}\ \varepsilon_{22}\ \gamma_{12}\ \gamma_{13}\ \gamma_{23} >$, le vecteur des déformations.

La matrice de la loi de comportement [D] du matériau correspondant à la couche k est définie par :

$$[\overline{D}] = \begin{bmatrix} \overline{D_{11}} & \overline{D_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{D_{12}} & \overline{D_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{D_{33}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{D_{44}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{D_{55}} \end{bmatrix} \qquad [23]$$

avec :

$$\overline{D_{11}} = E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) \; ; \; \overline{D_{22}} = E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21})$$

$$\overline{D_{12}} = E_{22}\nu_{12}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) \; ; \; \overline{D_{33}} = G_{12} \qquad [24]$$

$$\overline{D_{44}} = k_1\, G_{13} \; ; \quad \overline{D_{55}} = k_2\, G_{23}$$

où E_{11} et E_{22} sont respectivement les modules d'Young longitudinal (direction 1) et transversal (direction 2). G_{12} est le module de cisaillement dans le plan 1-2 et G_{13} et G_{23} sont respectivement les modules de cisaillement associés aux plans 1-3 et 2-3.

ν_{12} est le coefficient de Poisson associant la déformation transversale induite par une contrainte longitudinale. Les termes k_1 et k_2 sont respectivement les facteurs de correction de cisaillement associés aux plans 1-2 et 2-3 et sont considérés constants pour l'ensemble du stratifié. En appliquant aux relations [22] des changements de base qui correspondent à une rotation d'angle θ autour de l'axe 3, les relations contraintes-déformations s'expriment dans le repère local $\{x', y', z'\}$:

$$\{ \sigma' \} = [D] \{ \varepsilon' \} \qquad [25]$$

avec la matrice [D] telle que :

$$[D] = [T] [\overline{D}] [T]^T \qquad [26]$$

et la matrice [T] :

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn & 0 & 0 \\ n^2 & m^2 & -2mn & 0 & 0 \\ mn & mn & m^2n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n \\ 0 & 0 & 0 & -n & m \end{bmatrix} \qquad [27]$$

avec $m = \cos\theta$, $n = \sin\theta$ et θ, l'angle entre la direction 1 des fibres et l'axe local x'.

2.6 *Matrice de rigidité linéaire*

A partir de l'expression du Principe du Travail Virtuel interne pour un élément et en considérant les expressions [20] et [25], la matrice de rigidité linéaire s'écrit en fonction des coordonnées curvilignes ξ, η et ζ :

$$[K_L] = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [B]^T [D] [B]^T \det [J] \, d\xi d\eta d\zeta \qquad [28]$$

où det [J] est le déterminant de la matrice jacobienne [J].

Compte tenu que la matrice de la loi de comportement est considérée constante pour chaque couche du stratifié constituant la coque, la matrice de rigidité linéaire de l'élément s'écrit :

$$[K_L] = \sum_{k=1}^{N} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} [B]^T [D] [B]^T \det [J] \, d\xi d\eta d\zeta \qquad [29]$$

où N est le nombre de couches et z_k et z_{k-1} sont les côtes inférieure et supérieure de la couche k.

La matrice de rigidité élémentaire est évaluée numériquement pli par pli en utilisant soit un schéma d'intégration de Gauss [DHA 84] avec 3 points dans chacune des deux directions ξ et η, soit une intégration réduite avec 2 x 2 points. Pour les structures minces l'utilisation du schéma d'intégration à 3 points conduit au phénomène de verrouillage du cisaillement transversal et ainsi à une surestimation de la rigidité de la structure. Pour remédier à ce problème de verrouillage, la solution la plus souvent retenue est celle qui consiste à appliquer la technique de l'intégration réduite avec 2 x 2 points [ZIE 71].

2.7 *Vecteur des efforts extérieurs*

Soit un ensemble de forces F par unité de surface s'appliquant sur une surface donnée S, le travail virtuel dû aux efforts extérieurs a pour expression :

$$\iint_S < F > \{ \delta U \} \, dS \qquad [30]$$

où < F > représente le vecteur des composantes des forces appliquées et < U > le vecteur des trois composantes du déplacement d'un point quelconque de la coque.

En employant la relation [5] exprimant les composantes du vecteur déplacement en fonction de Ni (ξ, η), fonctions d'interpolation et l'expression du vecteur des variables nodales de l'élément, nous pouvons écrire :

$$\{ U \} = [N] \{ d \} \qquad [31]$$

où [N] est une matrice de dimensions 3 x 40 contenant les fonctions d'interpolation de Serendip.

En introduisant l'expression [31] dans la relation [30], est obtenu le vecteur des forces équivalentes :

$$\{ F_e \} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [N]^T \{ F \} \det [J] d\xi d\eta \qquad [32]$$

2.8 *Matrice de masse linéaire*

La matrice de masse pour un élément s'obtient en discrétisant le travail virtuel dû aux forces d'inertie de d'Alembert :

$$\iiint_{Ve} \rho < \ddot{U} > \{ U \} dV \qquad [33]$$

où ρ, $< \ddot{U} >$ et $< U >$ représentent respectivement la masse volumique, les composantes tangentielles et normale du vecteur accélération et le vecteur des trois composantes du déplacement d'un point quelconque de la coque.

En considérant le vecteur des variables nodales $\{ d_i \}$ associé au noeud i de l'élément [16] et le vecteur déplacement $< U >$ définie par la relation [5] ce dernier, peut se ré-écrire sous la forme suivante :

$$\{ U \} = \sum_{i=1}^{8} [L_i] \{ d_i \} \qquad [34]$$

où $[L_i]$ est une matrice de dimensions 3 x 5 faisant apparaître les fonctions d'interpolation $N_i (\xi, \eta)$ et les composantes des vecteurs unitaires locaux.

En définissant la matrice [L] de dimensions 3 x 40 constituée de la juxtaposition des huit matrices $[L_i]$, la matrice de masse élémentaire s'écrit :

$$[M] = \sum_{k=1}^{N} \rho_k \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} [L]^T [L] \det [J] d\xi d\eta d\zeta \qquad [35]$$

avec ρ_k, masse volumique de la couche k.

Pour l'évaluation de la matrice de masse élémentaire le schéma d'intégration avec 3 x 3 points de Gauss suivant ξ et η est retenu et avec 2 points (pour chaque pli) suivant l'épaisseur.

L'approche présentée ci-dessus pour représenter la matrice de masse élémentaire correspond à la notion de masse cohérente qui consiste à discrétiser le travail des forces d'inertie en utilisant des fonctions d'interpolation identiques à celles de la formulation cinématique. Toutefois, d'autres méthodes existent qui permettent d'obtenir pour certains éléments une matrice cohérente diagonale de masse avec prise en compte des termes d'inertie de rotation et qui conduisent à de bons résultats [HIN 79], [SUR 78].

3. Résultats numériques

3.1 *Analyse statique de panneaux composites*

Le premier exemple présenté concerne l'analyse du comportement statique de panneaux composites stratifiés soumis à un chargement de pression sinusoïdale.

Ce problème a été étudié par Leissa et Whitney [LEI 69] qui ont déterminé une solution analytique en considérant les hypothèses de Kirchhoff.

En raison des hypothèses retenues, toutes les analyses numériques effectuées ont porté sur des panneaux minces dont le rapport épaisseur/largeur (h/l) a été choisi égal à 100. Au cours de cette étude, deux séries de panneaux composites sont analysées. La première série est relative à des panneaux encastrés sur les quatre côtés, dont les nappes de fibres unidirectionnelles sont orientées alternativement par rapport à l'axe x de la plaque et sont d'épaisseur constante (*figure 3* ci-dessous).

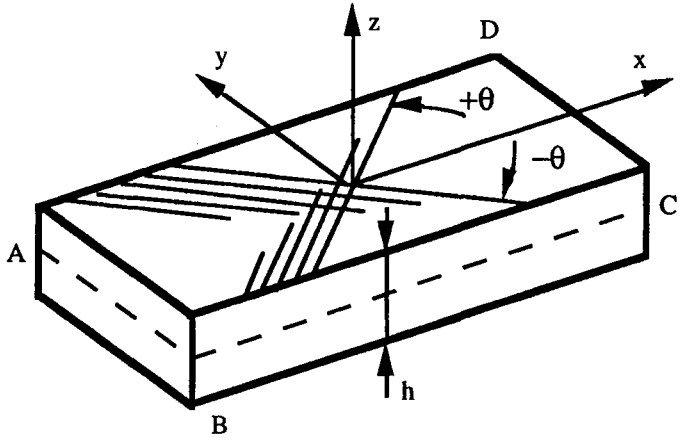


Figure 3 : *Description du panneau composite*

Deux séquences d'empilement sont examinées :

$[+\theta/-\theta]$ et $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]$

Les caractéristiques mécaniques considérées pour le matériau sont :

$$E_{11}/E_{22} = 40 \; ; \; \nu_{12} = 0{,}25 \; ; \; G_{12}/E_{22} = G_{13}/E_{22} = 1$$

Les conditions aux limites appliquées correspondent à un encastrement sur les quatre côtés avec la condition supplémentaire que les déplacements tangentiels sont libres :

- le long des côtés AB et CD $v = w = \alpha = \beta = 0$
- le long des côtés BC et AD $u = w = \alpha = \beta = 0$

Par raison de double symétrie du problème, un quart du panneau est discrétisé. Le maillage retenu est un découpage de 2 x 2 éléments de coque. Le chargement appliqué sur la structure est le suivant :

$$p = p_0 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \qquad [36]$$

Les calculs sont effectués en utilisant le schéma d'intégration réduite et en considérant la valeur de 5/6 pour les coefficients k_1 et k_2 compte tenu du rapport h/l. Les résultats numériques obtenus sur le déplacement vertical au centre du panneau et pour différents angles d'orientation des fibres du matériau sont reportés sous forme adimensionnelle dans le *tableau 1*, ci-dessous.

$-\theta/+\theta$ (en °)	$\theta = 0$	$\theta = 15$	$\theta = 30$	$\theta = 45$
$\overline{w}$ anal.	2.704	4.271	4.838	4.667
$\overline{w}$ calcul	2.723	4.291	4.858	4.688
$-\theta/+\theta/-\theta/+\theta/-\theta/+\theta$				
$\overline{w}$ anal.	1.017	0.608	0.434	0.337
$\overline{w}$ calcul	1.021	0.613	0.438	0.341

Tableau 1 : *Valeurs adimensionnelles du déplacement vertical au centre du panneau encastré.*

$$\overline{w} = w \frac{E_{22} h^3}{q_0 L^4} 10^3 \qquad [37]$$

Nous pouvons noter une excellente correspondance entre les résultats analytiques déterminés par Leissa et al. et ceux obtenus par l'élément fini tridimensionnel dégénéré de coque. Des écarts maxima de 1 % sont observés.

Les structures composites étudiées statiquement dans la deuxième série, sont des panneaux carrés dont les quatre côtés reposent sur des appuis glissants et dont les plis sont maintenant croisés par rapport à l'axe x (*figure 3*). Comme précédemment, deux séquences d'empilement sont considérées :

[0°/90°] et [0°/90°/0°/90°]

Les conditions aux limites imposées sont :

- le long des côtés AB et CD $u = w = 0$
- le long des côtés BC et AD $v = w = 0$

Le maillage utilisé pour les calculs, le schéma d'intégration réduite retenu et le chargement appliqué sont les mêmes que ceux considérés pour les panneaux à plis alternés.

Les calculs par éléments finis des panneaux sont réalisés pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie E_{11}/E_{22} et en considérant les caractéristiques suivantes :

$$\nu_{12} = 0{,}25 \; ; \; G_{12}/E_{22} = G_{13}/E_{22} = 0{,}5$$

Les valeurs calculées avec l'élément fini de coque épaisse sur la flèche w au centre des panneaux, sont données sous forme adimensionnelle dans le *tableau 2* ainsi que celles déterminées analytiquement par Leissa et al. [LEI 69]. Des écarts maxima de 1% sont obtenus entre les valeurs déterminées théoriquement et les valeurs calculées qui soulignent la fiabilité de l'élément fini de coque vis-à-vis de la prévision du comportement statique de structures composites minces.

0°/90°	$E_{11}/E_{22} = 10$	$E_{11}/E_{22} = 20$	$E_{11}/E_{22} = 30$	$E_{11}/E_{22} = 40$
$\overline{w}$ anal.	1.589	1.194	0.959	0.802
$\overline{w}$ calcul	1.590	1.197	0.964	0.807
0°/90°/0°/90°				
$\overline{w}$ anal.	1.017	0.608	0.434	0.337
$\overline{w}$ calcul	1.021	0.613	0.438	0.341

Tableau 2 : *Valeurs adimensionnelles du déplacement vertical au centre du panneau en simples appuis.*

3.2 *Analyse en vibrations libres de plaques sandwich*

Le deuxième exemple décrit dans cet article est relatif à l'analyse expérimentale et numérique du comportement en vibrations libres d'une plaque carrée sandwich épaisse en conditions libres-libres. Les objectifs de cette étude sont d'examiner l'influence du cisaillement transversal sur les fréquences et modes propres d'une structure sandwich d'une part et d'autre part d'évaluer la capacité de l'élément de coque sur la modélisation de problèmes dynamiques réels.

La plaque épaisse est constituée de deux couches d'acier d'épaisseur unitaire 3 mm et de quatre couches de mousse polyuréthanne d'épaisseur unitaire de 15,65 mm et de 31,3 mm. L'empilement de la structure est symétrique (*figure 4 ci dessous*).

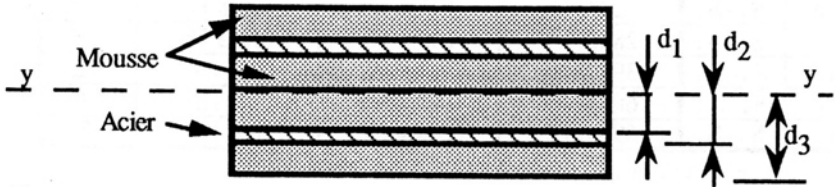


Figure 4 : *Définition de la plaque sandwich*

Les dimensions géométriques sont les suivantes (*figure 4*) :
$L = l = 900$ mm ; $h = 99{,}9$ mm ; $d_1 = 15{,}65$ mm ; $d_2 = 16{,}65$ mm ; $d_3 = 49{,}95$ mm

Les caractéristiques mécaniques employées pour l'acier sont :

$$E_a = 210 \text{ GPa} ; \nu = 0{,}3 \text{ et } \rho_a = 7800 \text{ kg/m}^3$$

et pour la mousse : $E_m = 88$ MPa ; $\nu = 0{,}3$ et $\rho_m = 700$ kg/m^3

Compte tenu de la double symétrie du problème, un quart de la plaque est discrétisé. Le découpage retenu est un maillage avec 4 x 4 éléments de coque. Pour la détermination des modes de flexion symétriques ou antisymétriques suivant les directions X et Y, des conditions soit de symétrie, soit d'antisymétrie sont imposées le long des axes X et Y.

Les valeurs numériques obtenues sur les six premières fréquences propres de la plaque épaisse sandwich sont données dans le *tableau 3* en considérant respectivement pour le coefficient de cisaillement k la valeur usuelle de 5/6 et la valeur de 1/350 environ pour l'empilement considéré, calculée selon la méthode de la flexion cylindrique [OWE 83].

Dans ce même tableau sont reportées également les valeurs expérimentales des fréquences propres déterminées à l'IMFL à l'aide d'un montage spécifique pour la réalisation des conditions libres-libres et à partir d'une méthode d'excitation impulsionnelle. Les déformées modales associées aux fréquences propres sont obtenues par excitation harmonique et au moyen d'un capteur de vitesse déplacé sur toute la structure.

Nous constatons que les résultats numériques obtenus sur les fréquences propres en considérant le coefficient k de 1/350, sont à moins de 5 % par rapport aux valeurs expérimentales. Seul un écart de l'ordre de 12 % est observé pour le quatrième mode. Ce résultat est toutefois relativement satisfaisant en raison des difficultés d'obtention d'une homogénéité parfaite de la mousse polyuréthanne.

Le *tableau 3* montre également l'importance des facteurs de correction de cisaillement transversal sur le comportement dynamique des structures sandwich épaisses. L'utilisation pour le coefficient k de la valeur 5/6 conduit effectivement à des écarts de 50 % environ sur les premiers modes propres par rapport aux valeurs expérimentales. Pour les modes supérieurs, des rapports de 4 environ sont obtenus entre les valeurs numériques et celles relevées expérimentalement sur la plaque sandwich.

N° du mode	Type	Calcul pour k = 5/6	Calcul pour k modifié	Valeurs expériment.	Ecarts %
1er	A.-A.	154,6 Hz	72,3 Hz	74,5 Hz	3
2ème	S.-S.	228,2 Hz	105,4 Hz	101,8 Hz	3,5
3ème	S.-S.	282,7 Hz	109,6 Hz	111,5 Hz	1,7
4ème	S.-A.	391,9 Hz	123,9 Hz	141 Hz	12
5ème	S.-A.	684,8 Hz	160,3 Hz	175 Hz	3
6ème	S.-S.	695,8 Hz	159,4 Hz	165 Hz	5

Type ; A. = Antisymétrique ; S. = Symétrique

Tableau 3 : *Valeurs numériques et expérimentales des fréquences propres de la plaque sandwich.*

3.3 *Flambement de panneaux sandwich sous compression*

Le troisième et dernier exemple présenté concerne l'étude expérimentale et numérique du comportement au flambement global de panneaux sandwich simplement appuyés, sous compression axiale.

Les panneaux sandwich réalisés à l'IMFL, sont composés de deux semelles identiques en carbone Haute Résistance Brochier T300/914C, d'une âme centrale en nid d'abeille Nomex d'Hexcel et d'un film de colle Redux armé d'un tissu en nylon Les deux revêtements en matériaux composites sont constitués d'un empilement de trois couches [+θ/0°/-θ] d'épaisseur unitaire 0,125 mm. Au cours de cette étude, quatre angles d'orientation des nappes unidirectionnelles de carbone sont considérés par rapport à l'axe de chargement X : 0°, 30°, 45°et 75°.

L'épaisseur de nid d'abeille est de 10 mm et celle du film de colle est de 0,2 mm. La géométrie détaillée des éprouvettes est montrée sur la *figure 5*.

Les caractéristiques mécaniques des matériaux employés sont :

* Carbone HR T300/914C

E_{11} = 135,4 GPa ; E_{22} = 8,5 GPa

$G_{12} = G_{13} = G_{23}$ = 5,15 GPa ; ν_{12} = 0,317

* nid d'abeille Nomex

E_{33} = 55 MPa ; G_{13} = 26 MPa ; G_{23} = 10 MPa

Dans le but d'obtenir des conditions parfaites d'appuis simples sur les quatre côtés des panneaux, un montage d'essai spécifique a été réalisé qui reprend en appuis rotulants les bords des panneaux soumis aux efforts de compression et les deux autres bords en appuis glissants. Les appuis rotulants sont réalisés à l'aide d'inserts métalliques cylindriques emprisonnés entre les deux flasques du montage et les appuis glissants de demi-ronds métalliques (*figure 6*).

L'évolution numérique des charges critiques et des modes de flambement est effectuée en considérant un seul maillage de 5 x 5 éléments de coque sur le quart de chaque panneau analysé.

Les calculs sont réalisés en prenant pour le coefficient de cisaillement k, la valeur de 5/6 et en appliquant le schéma d'intégration réduite.

Dans le *tableau 4*, sont reportées les valeurs numériques obtenues sur les charges linéaires de flambement pour les quatre séquences d'empilement ainsi que les valeurs déterminées expérimentalement.

Charges critiques (en daN)	0°	30°	45°	75°
Calcul	4800	5650	5820	4600
Expérience	5590	5680	5650	5180

Tableau 4 : *Charges critiques calculées et expérimentales des panneaux sandwich sous compression.*

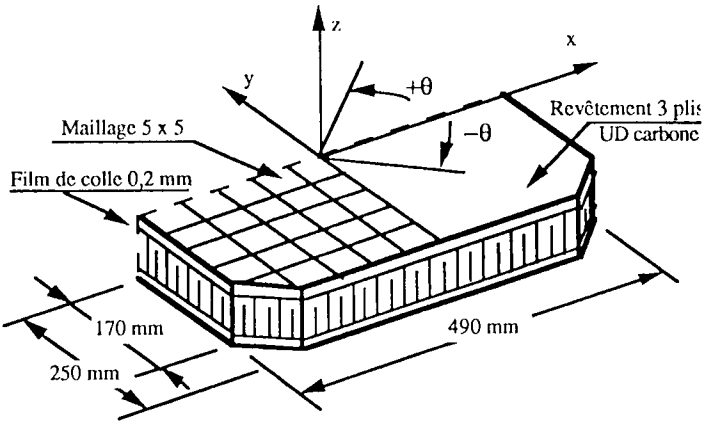


Figure 5 : *Description du panneau sandwich*

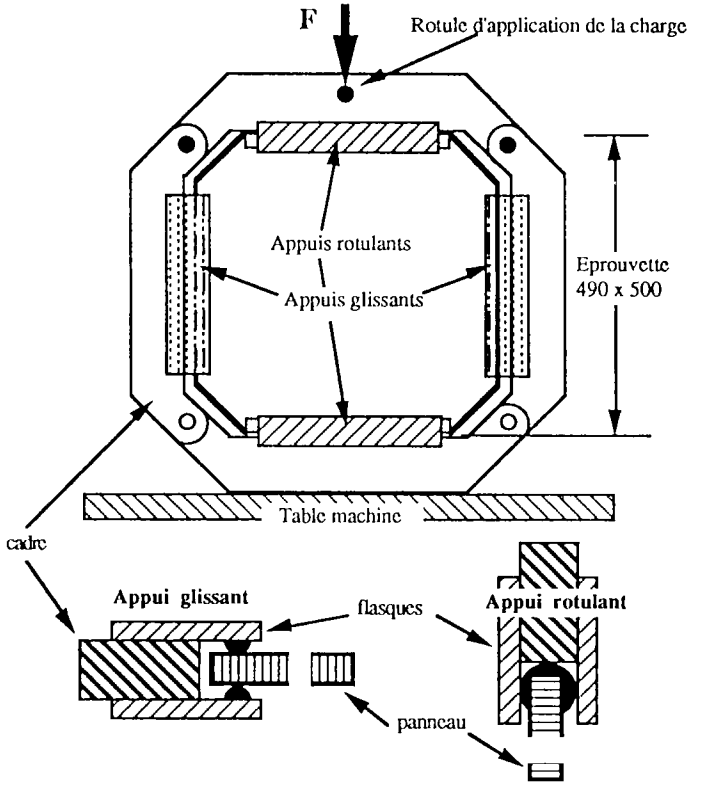


Figure 6 : *Description du montage expérimental*

Nous constatons que les charges de flambement obtenues avec l'élément de coque sont très proches des valeurs expérimentales. Pour les nappes orientées suivant l'axe de chargement (0°), un écart de 15 % environ apparaît. Ce dernier est tout à fait acceptable compte tenu des difficultés de mise en œuvre des conditions aux limites.

Il convient de noter que toutes les charges critiques calculées sont associées à un mode de flambement symétrique suivant la direction X. Ce phénomène est effectivement constaté expérimentalement au début du flambement mais rapidement la rupture des panneaux est atteinte par cisaillement du nid d'abeille et se situe généralement vers l'un des bords comprimés axialement.

4. Conclusion

La formulation complète de l'élément dégénéré de coque épaisse à huit noeuds et quarante degrés de liberté pour la modélisation du comportement de coques composites stratifiées minces ou épaisses a été présentée. Il a été montré que cet élément peut être efficacement appliqué pour la résolution de problèmes industriels au travers des différents analyses statiques, de vibrations libres et de flambement linéaire de coques étudiées.

L'extension de la formulation sera prochainement étendue au domaine non linéaire géométrique et matérielle.

5. Bibliographie

[BOU 89] BOUNIE J.L., "Composites pour structures aéronautiques", Revue Française de Mécanique, n°1989-2, p 209-218.

[GAY 89] GAY D., Matériaux composites, 2ème édition, Hermès, Paris, 1989.

[DUP 89] DUPRIEZ F., GEOFFROY P. et PALUCH B., "Maquettes de pales en matériaux composites ", Revue Française de Mécanique, n°1989-2, p 219-241.

[WHI 87] WHITNEY J.M., Structural analysis of laminated anisotropic plates, Lancaster, Technomic Publication, 1987.

[NOO 90] NOOR A.K. et BURTON W.S., "Assessment of computional for anti--symmetrically laminated anisotropic plates", Comp. Struct., 14, 1990,p. 233-265.

[MIN 51] MINDLIN R.D., "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates", JAM, Vol. 18, 1951, p. 31-38.

[REI 45] REISSNER E., "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", JAM, Vol. 12, 1945, p. 69-77.

[BAT 92] BATOZ J.L., DHATT G.S., Modélisation des structures par éléments finis, Volume 3, Coques, Hermès, 1992.

[BAT 77] BATOZ J.L., "Analyse non-linéaire des coques minces élastiques de formes arbitraires par éléments triangulaires courbés", Thèse de Doctorat es Sciences, Univers. Laval, Québec, 1977.

[GEO 83] GEOFFROY P., "Développement et évaluation d'un élément fini pour l'analyse non linéaire statique et dynamique de coques minces", Thèse de Docteur-Ingénieur, Univers. de Technologie de Compiègne, 1983.

[CHA 88] CHATELAIN J., BATOZ J.L., "Flambement et post-flambement de coques minces en matériaux composites avec un élément de coque quadrilatéral plan", JNC6, Paris, Pluralis Ed., 1988, p. 725-738.

[LAR 90] LARDEUR P., "Développement et évaluation de deux nouveaux éléments finis de plaques et coques composites avec influence du cisaillement transversal", Thèse de Doctorat, Univers. de Technologie de Compiègne, 1990.

[FAF 89] FAFARD M., DHATT G.S., BATOZ J.L., "A new discrete Kirchhoff plate/shell element with updated procedures", Computers and Structures, Vol.31, n°4, 1989, p. 591-606.

[AHM 70] AHMAD S. et al., "Analysis of thick and thin shell structures by curved elements", Int. J. Numer. methods Engng., 2, 1970, p. 419-541.

[GIR 77] GIRARD R., 1977, "Eléments finis isoparamétriques de coque multicouche pour le calcul des structures aérospatiales en matériaux composites", La Recherche Aérospatiale, n°2, 1977, p. 131-152.

[GIR 80] GIRARD R., 1980, "Eléments finis isoparamétriques pour le calcul des coques multicouches en grands déplacements structures", Numerical Methods for Engineering, 2ième Congrès Int. GAMNI, 1980.

[OWE 83] OWEN D.R.J., FIGUERAS J.A., "Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells", Int. J. Numer. methods Engng., 19, 1983, p. 541-566.

[COR 88] CORNUAULT C., "Elaboration d'éléments de coque à partir d'éléments de volume dégénérés", Calcul des Structures et Intelligence Artificielle, Vol. 2, Fouet, Ladevèze, Ohayon Editeurs, Editions Pluralis, 1988, p. 161-178.

[DHA 84] DHATT G.S. et TOUZOT G., "Une présentation de la méthode des éléments finis", 2ème édition, Maloine S.A., Editeur, 1984.

[SIM 81] SIMON L., "A set of finite elements developped for the dynamic computation of composite helicopter blade", Int. Conf. on Composite Structures, Prisley (U.K.), 1981.

[GIR 86] GIRARD R., 1986, "Vibrations de structures composites multicouches en rotation", La Recherche Aérospatiale, n°2, 1986, p. 127-135.

[GEO 86] GEOFFROY P., 1986, "Détermination des caractéristiques dynamiques d'une pale en matériaux composites", La Recherche Aérospatiale, n°2, 1986, p.137-144.

[ZIE 71] ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L., TOO J.M., "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells", Int. J. Numer. methods Engng., 3, 1971, p. 275-290.

[HIN 79] HINTON E. et BICANIC N., "A comparison of Lagrangian and Serendipity Mindlin Plate elements for free vibration analysis", Comp. and Struct., 10, 1979, p.483-493.

[SUR 78] SURANA K.S, "Lumped mass matrices with non-zero inertia for general shell and axisymetric shell elements", Int. J. Numer. methods Engng., 12, 1978, p. 1635-1650.

[LEI 69] LEISSA A.W., WHITNEY J.M., "Analysis of heterogeneous anisotropic plates", J. of Applied Mechanics, Vol. 36, 1969.